



Revue Intelligence Stratégique
Journal des publications scientifiques
Volume 5, numéro 14
Octobre-Décembre 2022
p-ISSN : 3006-547X ; e-ISSN : 3006-5488
<https://doi.org/10.62912/>

QUELQUES PROPRIETES TOPOLOGIQUES DE L'HYPER-ESPACE $K(X)$ MUNI DE LA TOPOLOGIE DE VIETORIS

Zéphyrin N'TEBA MAKALA

Chef de Travaux et Doctorant à l'Université Pédagogique Nationale/Kinshasa-RDC

RESUME

L'objectif de cet article est d'abord de construire la topologie de Vietoris sur $K(X)$ où X est un espace de Tychonoff, de déterminer les sous-ensembles utiles de $K(X)$ et de déduire les propriétés de type compact ainsi que de type dénombrable sur $K(X)$. Pour ce faire, il part de l'étude des sous-ensembles utiles de $K(X)$ tels que les sous-ensembles utiles $F(X)$ des parties finies d X . il montre que $F(X)$ est un sous-ensemble de $K(X)$, que D est dense dans X si et seulement si $F(D)$ est dense dans $K(X)$ et est compact si et seulement si $K(X)$ est compact. Il se termine par l'identification des propriétés invariantes et non invariantes entre l'hyper-espace $K(X)$ et l'espace de Tychonoff X .

Mots-clés : *Hyper-espace, topologie de Vietoris, espace de Tychonoff, espace de Lindelöf, poids compact.*

ABSTRACT

The aim of this paper is first to construct the Vietoris topology on $K(X)$ where X is a Tychonoff space, to determine the useful subsets of $K(X)$ and to deduce the properties of compact type as well as of countable type on $K(X)$. To do this, he starts by studying useful subsets of $K(X)$ such as the useful subsets $F(X)$ of finite parts d X . He shows that $F(X)$ is a subset of $K(X)$, that D is dense in X if and only if $F(D)$ is dense in $K(X)$ and is compact if and only if $K(X)$ is compact. It concludes with the identification of invariant and non-invariant properties between the hyperspace $K(X)$ and the Tychonoff space X .

Keywords : *Hyperspace, Vietoris topology, Tychonoff space, Lindelöf space, compact weight.*

INTRODUCTION

Soit X un ensemble de Tychonoff et 2^X l'ensemble de toutes les parties fermées de X . Nous construisons dans l'hyper-espace $K(X)$ la topologie de Vietoris.

Nous y étudions les sous-ensembles utiles de $K(X)$ et nous nous concentrons sur les équivalences des propriétés de $K(X)$ en rapport à celles de X .

I. PROPRIETES TOPOLOGIQUES DE $K(X)$

Pour un espace complètement régulier (ou de Tychonoff) X notons par : $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est continue sur } X\}$.

$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ et } A \text{ est fermé de } X\}$, $K(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ et } A \text{ est compact dans } X\}$ et $F(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ et } A \text{ est un sous-ensemble fini de } X\}$.

Il est connu dans la littérature de la $C(X)$ – Théorie que les espaces $C(X)$, 2^X , $K(X)$ et $F(X)$ sont intimement liés par leurs propriétés topologiques [I.7], [I.8], [III,1] et [III,4].

L'objet de ce mémoire est de rappeler d'une part ces liens en les situant dans leur aperçu historique et d'autre part d'introduire de nouvelles propriétés en établissant les dualités entre les espaces X et $K(X)$. Un résultat typique décrira une propriété sur X en fonction d'une propriété duale sur l'hyper-espace $K(X)$.

Pour ce faire, nous topologisons nos deux espaces X et $K(X)$. Sur l'hyper-espace $K(X)$, nous construisons la topologie de Vietoris. Cette topologie a pour base des ouverts, les ensembles de la forme $\langle V_i \rangle = \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle = \{A \in K(X) : A \subset V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n \text{ et } A \cap V_i \neq \emptyset \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n\}$, où $n \in \mathbb{N}$ et V_i est un ouvert non vide dans X .

Sur l'espace fonctionnel $C(X)$, nous rappelons la topologie « compact-ouvert », communément appelée topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X .

Une sous-base des ouverts de $C(X)$ est définie par $S = \{ [A, V] : A \text{ est un compact de } X \text{ et } V \text{ un ouvert de } \mathbb{R} \}$ où $[A, V] = \{ f \in C(X) : f(A) \subset V \}$. Notons $C(X)$ muni de cette topologie par $C_v(X)$.

Etant donné que la topologie « compact-ouvert » sur $C(X)$ est définie au moyen des sous-ensembles compacts de X . L'on s'attendra à ce qu'une propriété topologique sur X faisant appel aux sous-ensembles compacts de X se traduit en une propriété sur l'hyper-espace $K(X)$. L'inverse est aussi vrai. En effet, ce qui est vrai pour X est d'autant vrai pour $C(X)$ que pour $K(X)$. Ici, nous nous concentrons sur les équivalences de X et $K(X)$.

II. SOUS-ENSEMBLES UTILES DE $K(X)$

Pour un espace de Tychonoff X et $n \in \mathbb{N}$,
posons $F_n(X) = \{ A \in F(X) : \text{card } A \leq n \}$.

Notons $\text{card}(A) = |A|$ pour tout ensemble A .

Proposition 1.

$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ et chaque $F_n(X)$ est un fermé de $K(X)$.

Preuve

Comme chaque $F_n(X) \subset F(X)$ clairement $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X) \subset F(X)$.

Pour l'inclusion inverse, soit $A \in F(X)$. Comme A est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{card } A = n_0$, d'où $A \in F_{n_0}(X) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$. Donc $A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$. D'où l'égalité $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$.

Pour voir que chaque $F_n(X)$ est fermé dans $K(X)$, fixons n_0 et considérons $F_{n_0}(X)$. Il suffit de montrer que chaque $\{ \{x\} \}$ est fermé dans

$K(X)$ pour tout $x \in X$. Pour cela montrons que $K(X) \setminus \{\{x\}\}$ est ouvert dans $K(X)$. Soit $A \in K(X) \setminus \{\{x\}\}$, alors $A \in \langle V_x \rangle \subset K(X) \setminus \{\{x\}\}$ où $V_x = X \setminus \{x\}$. Par récurrence, on voit que $K(X) \setminus \{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}\}$ est ouvert dans $K(X)$, ce qui prouve que $F_{n_0}(X)$ est fermé dans $K(X)$.

Remarques 1.

$F(X)$ est donc un F_σ – ensemble de $K(X)$ et $K(X) \setminus F(X) = K(X) \setminus$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X) \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (K(X) \setminus F_n(X))$$

est un G_σ – ensemble de $K(X)$.

$K(X) \setminus F(X) = \{A \in K(X) : \text{card } A \cong \aleph_0\}$ est un

G_σ – ensemble de $K(X)$.

$K(X) \setminus F_n(X) = \{A \in K(X) : \text{card } A \succ n\}$ est un ouvert de $K(X)$.

Proposition 2.

D est dense dans X si et seulement si $F(D)$ est dense dans $K(X)$.

Preuve

Supposons que D est un sous-ensemble dense de X . Soit $W = \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle$ est un ouvert non vide dans $K(X)$. Montrons que $W \cap F(D) \neq \emptyset$. Comme $W = \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle$, est non vide. Par définition, il existe

$$A \in W = \left\{ A \in K(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \text{ et } A \cap V_i \neq \emptyset \ \forall i = 1, 2, \dots, n \right\} \text{ où}$$

V_i est un ouvert dans X . Comme $V_i \neq \emptyset$, alors par la densité de D dans X , $\exists x_i \in D \cap V_i$. Alors $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in F(D)$ et $A \in W$ car

$A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i, A \cap V_i \neq \emptyset$ car $x_i \in A$ et $x_i \in V_i$. Ainsi $w \cap F(D) \neq \emptyset$. Donc $F(D)$ est dense dans $K(X)$.

Réciproquement, supposons que $F(D)$ est dense dans $K(X)$. Soit V un sous-ensemble non vide de X . Alors $\langle V \rangle$ est un ouvert non vide de $K(X)$; d'où, il existe $A \in \langle V \rangle \cap F(D)$. Il suit que $V \cap D \neq \emptyset$. D'où D est dense dans X .

Remarque 2.

Si D est dense dans X , alors $K(D)$ est dense dans $K(X)$ car D dense dans $X \Rightarrow F(D) \subset K(D) \subset K(X)$ et $F(D)$ dense dans $K(X) \Rightarrow K(D)$ dense dans $K(X)$.

Proposition 3.

X est compact si et seulement si $K(X)$ est compact.

Preuve

Supposons X compact. Soit $(W_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ un recouvrement ouvert de $K(X)$ par des ouverts de base où $W_\alpha = \langle V_1^\alpha, V_2^\alpha, \dots, V_{n\alpha}^\alpha \rangle$ c.à.d. $K(X) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} W_\alpha$ comme X est compact, alors $X \in K(X)$. D'où, il existe $\alpha_0 \in \Gamma$ tel que $X \in W_{\alpha_0} = \langle V_1^{\alpha_0}, V_2^{\alpha_0}, \dots, V_{n\alpha_0}^{\alpha_0} \rangle$. D'où $X \subset \bigcup_{i=1}^n V_i^{\alpha_0}$ et $X \cap V_i^{\alpha_0} \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Si $A \in K(X)$, alors $A \subset X$ ainsi $A \in W_{\alpha_0}$. $\{W_{\alpha_0}\}$ est un sous-recouvrement fini de $(W_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$. Réciproquement, si $K(X)$ est compact, soit $(U_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ un recouvrement ouvert de X , alors pour tout $A \in K(X)$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{N} / \{(V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n})\}$ ouvert fini dans $(W_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ tel que $A \subset V_{\alpha_1} U, \dots, U V_{\alpha_n}$. Alors $X \in W_{\alpha_A} = \langle V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n} \rangle$ et $\{W_{\alpha_A} : A \in K(X)\}$ un recouvrement ouvert de $K(X)$. Par sa compacité, il

existe $(W_{\alpha_A^0}, \dots, W_{\alpha_n^0})$ sous-recouvrement ouvert de $K(X)$. Alors $(V_{\alpha_A^{A_1}}, \dots, V_{\alpha_n^{A_n}})$ est un recouvrement fini de $(V_\alpha)_\alpha$. D'où X est compact.

Corollaire 4.

X est un espace de Lindelöf si et seulement si $K(X)$ est un espace de Lindelöf.

Théorème 5.

X est T_2 si et seulement si $K(X)$ est T_2 pourvu que X soit compact.

Preuve

Si $K(X)$ est T_2 alors $\{\{x\} : x \in X\}$ est une copie de X . D'où X est T_2 .

Réciproquement, si X est T_2 , soit $K \neq K' : K(X)$ est un espace de Lindelöf. Nous pouvons supposer, à cause de la compacité de X que K et K' sont disjoints. Alors il existe dans X deux ouverts V et V' disjoints tels que K est inclus dans V et K' est inclus dans V' .

D'où $K \in \langle V \rangle$ et $K' \in \langle V' \rangle$ et $\langle V \rangle, \langle V' \rangle$ sont des ouverts disjoints séparant K et K' .

III. PROPRIETES DE TYPE COMPACT SUR $K(X)$

Théorème 1.

Un sous-espace $\mathcal{A}$ de $K(X)$ est compact si et seulement si $\mathcal{A}$ est un fermé de $K(X)$ et si $\cup \mathcal{A}$ est un compact de X .

Preuve

Soit $\mathcal{A}$ un compact de $K(X)$. Clairement $\mathcal{A}$ est fermé de $K(X)$ maintenant $\cup \mathcal{A} = \cup \{A : A \in \mathcal{A}\} \subset X$. pour voir $\cup \mathcal{A}$ est compact dans X , soit $\{0_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ un recouvrement ouvert de $\cup \mathcal{A}$ dans X , alors $\{\langle 0_\alpha \rangle : \alpha \in \Gamma\}$ est un *recouvrement* ouvert de $\mathcal{A}$ dans $K(X)$. Par la compacité de $\mathcal{A}$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\alpha \in \Gamma$ tel que $\mathcal{A} \subset 0_{\alpha_1} \cup 0_{\alpha_2} \cup \dots \cup 0_{\alpha_n}$. D'où $\{0_{\alpha_1}, 0_{\alpha_2}, \dots, 0_{\alpha_n}\}$ est un sous – recouvrement fini de $\cup \mathcal{A}$.

Donc $\cup \mathcal{A} = \cup \{A : A \in \mathcal{A}\}$ est un compact de X . Pour la réciproque, si $\cup \mathcal{A}$ est compact dans X , alors $K(\cup \mathcal{A})$ est compact dans $K(X)$. Or $\mathcal{A}$ est fermé dans $K(\cup \mathcal{A})$ car fermé dans $K(X)$. D'où $\mathcal{A}$ est compact dans $K(X)$.

Théorème 2.

$w_c(X) = w_c(K(X))$ poids-compact

Preuve

$w_c(X) = w_c(\hat{X}) \leq w_c(K(X))$ où $\hat{X} = \{\{x\} : x \in X\}$. Donc $w_c(X) = w_c(K(X))$.

Pour l'inégalité inverse, soit A un compact de $K(X)$, comme UA est un compact de X , alors $A \subset K(UA)$, d'où $w(A) \leq w(K(UA)) = w(UA) \leq w_c(X)$.

Donc $w_c(K(X)) \leq w_c(X)$. Ainsi $w_c(X) = w_c(K(X))$.

Théorème 3.

X σ -compact si et seulement si $K(X)$ σ -compact

Preuve

Si X est σ -compact, il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sous-ensembles compact de X telle que $X = \cup \{K_n / n \in \mathbb{N}\}$ alors $K(X) = \cup \{K(K_n) : n \in \mathbb{N}\}$ et $K(X)$ est σ -compact car chaque $K(K_n)$ est compact dans $K(X)$.

Réciproquement, si $K(X) = \cup \{A_n / n \in \mathbb{N}\}$ où chaque A_n est compact de $K(X)$, alors par le théorème 2.2.1., UA_n est compact dans X et $X = \cup_{n=1}^{\infty} (UA_n)$ est σ -compact.

Théorème 4.

X Presque σ -compact si et seulement si $K(X)$ presque σ -compact.

Preuve

Similaire au théorème 3.

Théorème 5.

X Héli-compact si et seulement si $K(X)$ héli-compact.

Preuve

Similaire au théorème 3.

IV. PROPRIETES DE TYPE DENOMBRABLE

Séparabilité dans $K(X)$ 1.

X est séparable si et seulement si $K(X)$ est séparable.

Preuve

Si $K(X)$ est séparable, alors $\hat{X} = \{\{x\} : x \in X\}$ est séparable. D'où X est séparable. Si X est séparable, soit $D \subset X$, un sous-ensemble dense et dénombrable de X , alors $F(D)$ est dense et dénombrable de $K(X)$. D'où $K(X)$ est séparable.

Cosmicité et Subcosmicité 2

Théorème 1.

X est $\aleph_0$ -espace si et seulement si $K(X)$ est cosmique.

u est un k -réseau de K si et seulement si $K(u) = \{K(U) : u \in U\}$ est un réseau de $K(X)$. D'où le résultat du théorème 1.

Théorème 2.

X est $\aleph_0$ -espace si et seulement si $K(X)$ est $\aleph_0$ -espace

Théorème 2.

X est subcosmique si et seulement si $K(X)$ est subcosmique

Preuve

Supposons X subcosmique

Soit $f : X \rightarrow Y$ une bijection continue

De X sur Y est un espace métrique séparable

Alors : $\hat{f} : K(X) \rightarrow K(Y)$ est une bijection continue de $K(X)$ vers $K(Y)$. Comme $K(Y)$ est cosmique alors $\hat{f}$ est une bijection de $K(X)$ vers l'espace cosmique $K(Y)$. D'où $K(X)$ est subcosmique.

Réciproquement, si $K(X)$ est subcosmique alors $\hat{X} = \{\{x\} : x \in X\}$ est subcosmique. D'où X est subcosmique.

Dans le chapitre qui suit, nous étudions à partir d'une fonction continue $f : X \rightarrow Y$, les propriétés de son dual $\hat{f} : K(X) \rightarrow K(Y)$. Ce qui nous permettra de bien comprendre le transport des propriétés de $K(X)$ vers les propriétés de $K(Y)$.

CONCLUSION

Nous voici au terme de notre article qui a pour objet l'étude sur quelques propriétés de l'hyper-espace $K(X)$ des sous-ensembles compacts muni de la topologie de Vietoris en fonction des propriétés topologiques de l'espace de Tychonoff.

Après avoir positionné la construction de la topologie de Vietoris sur l'hyper-espace $K(X)$ pour passer au point de ladite étude, nous avons poursuivi nos investigations au niveau de la détermination des sous-ensembles utiles de $K(X)$ et des propriétés entre l'hyper-espace $K(X)$ et l'espace de Tychonoff.

Pour concrétiser cette étude, nous avons établi un rapport entre les propriétés de $K(X)$ et celle de l'espace de Tychonoff que nous résumons dans le tableau ci-dessous.

Propriétés sur X	Propriétés sur $K(X)$
1. Propriétés invariantes	
D est dense dans X X compact X compact et T_2 - espace UA compact de X $w_c(X)$ poids compact X presque σ - compact X hémicompact X séparable $X \aleph_0$ - espace X subcosmique	$F(D)$ est dense dans $K(X)$ $K(X)$ compact $K(X) T_2$ - espace A compact de $K(X)$ $w_c(K(X))$ poids compact $K(X)$ presque σ - compact $K(X)$ hémicompact $K(X)$ séparable $K(X) \aleph_0$ - espace $K(X)$ subcosmique
2. Propriétés non invariantes	
$X \aleph_0$ - espace	$K(X)$ cosmique

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BANOV S., DIMOV G. et NEDEV S., "On a theorem of H.-J. Schmidt", in *C. R. Acad. Vulgare Sci.*, 46(3), 1993.
- BOURBAKI N., *Eléments de Mathématique : Topologie générale, espaces fonctionnels*, Herman, Paris VI, 1961.
- BOUZIAD A. et CULBRI T., "Čech – complete spaces and the upper topology", Université de Rouen, U.F.R des sciences, URA CNRS 1378, 76821 Mont Saint Aignan, France.
- BRISAC R., *Sur les fonctions multiformes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1947.
- DIMOV G., "Some remarks on the commutability between hyperspaces and subspaces, and on Schmidt's conjecture", dans *Compt. Rend. Acad. Bulgare Sci.*, 47 (4), 1994.
- FELL. J.M.G., « Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-hausdorff space », dans *Proc. A.M.S.* 13.
- GILLMAN I. et TERISON M., *Tings of continious functions*, Van nostrand Runheld compagny, New-york, 1976.
- IVANOVA-DIMOV E., "Vietoris –type topologies on hyper-espaces", in *Topologies applications*, 4 janvier 2017.
- LEVI S. et al., "On the infimum of the Hausdorff and Vietoris topologies", dans *Amer. Math. Sco*, volume 118, number 3, July 1933.
- McCOY R. A. et NTANTU, *Topological propriety et space fonctions, lecture notes in Mathematic 1315*, Springer-Verlay, Berlin, 1988.
- MICHAEL E., « Topologies on spaces of subsets », dans *Trans. Amer. Math. Soc.* 71, 1951.
- NTANTU I., "Caractérisation de la propriété de Baire avec l'hypo-topologie", dans *CRUPN*, N°042, 2010.
- NTANTU I. « Séminaire de DEA (Analyse) », Faculté des Sciences UPN/Kinshasa, 2012-2013, Inédit.
- SCHMETS T., *Espaces des fonctions continues springs – verlog*, 1976.
- SCHMIDT H. J., "Hyperspaces of quotient and subspaces. I. Hausdorff topological spaces", dans *Math. Nachr.* 14, 1981.